

Kombinatorika

- **Vypíšte všetky spôsoby, ktorými vieme zapísať písmená *A, K, M* tak aby sa v jednotlivých slovách neopakovali.**

Riešenie : AKM AMK MAK
 MKA KAM KMA

Písmená vieme zapísať 6-timi spôsobmi.

- **V cukrárni majú jahodovú, čokoládovú, vanilkovú, citrónovú a orieškovú zmrzlinu. Koľko dvojitéch a trojitých rôznych zmrzlín si môžeme kúpiť ? Vypíšte všetky možnosti.**

Riešenie : dvojité zmrzliny

jahoda - čokoláda jahoda - vanilka jahoda - citrón jahoda – oriešky
čokoláda – vanilka čokoláda – citrón čokoláda – oriešky
vanilka – citrón vanilka – oriešky
citrón – oriešky

trojité zmrzliny

jahoda – čokoláda – vanilka jahoda – čokoláda – citrón jahoda- čokoláda- oriešky
jahoda – vanilka – citrón jahoda – vanilka – oriešky jahoda – citrón – oriešky
čokoláda – vanilka – citrón čokoláda – vanilka – oriešky čokoláda – citrón – oriešky
vanilka – citrón – oriešky

Máme 10 možností na dvojité zmrzliny a 10 možností na trojité zmrzliny .

- **Hádzeme troma hracími kockami. Vypíšte všetky možnosti, keď súčet hodnôt na všetkých troch kockách je menej ako 9 bodov.**

Riešenie : Na hracej kocke môžu padnúť hodnoty 1, 2, 3, 4, 5, 6

Súčet môže byť : $1 + 1 + 1 = 3$ $1 + 1 + 2 = 4$ $1 + 2 + 2 = 5$
 $1 + 2 + 3 = 6$ $1 + 2 + 4 = 7$ $1 + 3 + 4 = 8$ $2 + 2 + 1 = 5$
 $2 + 2 + 2 = 6$ $2 + 2 + 3 = 7$ $2 + 2 + 4 = 7$ $2 + 3 + 3 = 8$
 $3 + 3 + 3 = 9$ (tu už neplatí podmienka za zadania)

Je 11 možností, kedy súčet čísel, ktoré padnú na troch kockách je menej ako 9 bodov.

- **Osem študentov má na internáte pripravené ubytovanie v troch izbách. Dve sú trojpostel'ové a jedna dvojpostel'ová. Koľko je spôsobov rozdelenia študentov do izieb ?**

Riešenie : prvá izba $n_1 = 3$, druhá izba $n_2 = 3$,
tretia izba $n_3 = 2$, $n = 3 + 3 + 2 = 8$

$$P_{3,3,2}^*(8) = \frac{8!}{3! 3! 2!}$$

$$P_{3,3,2}^*(8) = \frac{40320}{72}$$

$$P_{3,3,2}^*(8) = 560$$

Existuje 560 spôsobov rozdelenia študentov do izieb.

- **Koľkokorakým spôsobom je možné hodiť troma kockami súčet 11 ?**

Riešenie :

permutácia trojice 6,4,1 : $P(3) = 3! = 6$

permutácia trojice 6,3,2 : $P(3) = 3! = 6$

permutácia trojice 5,5,1 : $P_{2,1}^*(3) = 3$

permutácia trojice 5,4,2 : $P(3) = 3! = 6$

permutácia trojice 5,3,3 : $P_{1,2}^*(3) = 3$

permutácia trojice 4,4,3 : $P_{2,1}^*(3) = 3$

Spolu $6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3 = 27$ spôsobov.

- **Štyri české a tri slovenské knihy treba usporiadať na policičke tak, aby boli zoradené najprv české a potom slovenské knihy. Koľkokorakým spôsobom sa to dá urobiť ?**

Riešenie :

Usporiadanie českých kníh : $P(4) = 4! = 24$

Usporiadanie slovenských kníh : $P(3) = 3! = 6$

$$N = P(4), P(3) = 24 \cdot 6 = 144$$

Knihy sa dajú usporiadať 144 spôsobmi.

- **Osem študentov si sľúbilo, že si z prázdnin navzájom pošlú pohľadnice. Koľko pohľadníc rozoslali ?**

Riešenie : $n = 8, k = 2.$

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

$$V(2, 8) = \frac{8!}{(8 - 2)!}$$

$$V(2, 8) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!}$$

$$V(2, 8) = 8 \cdot 7$$

$$V(2, 8) = 56$$

Študenti rozoslali 56 pohľadníc.

- **Do školského výboru zvolili 7 žiakov. Koľkými spôsobmi sa dá z nich vybrať predseda, podpredseda, tajomník a pokladník ?**

Riešenie : $n = 7, k = 4$

$$V(4, 7) = \frac{7!}{(7 - 4)!}$$

$$V(4, 7) = \frac{7!}{3!}$$

$$V(4, 7) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!}$$

$$V(4, 7) = 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$V(4, 7) = 840$$

Funkcionári výboru sa dajú vybrať 840 spôsobmi.

- **Z koľkých rôznych prvkov môžeme vytvoriť 240 variácií 2. triedy ?**

Riešenie : $n = x, k = 2$

$$V(2, x) = 240$$

$$\frac{x!}{(x - 2)!} = 240$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!} = 240$$

$$x(x-1) = 240$$

$$x^2 - x - 240 = 0$$

$$(x-16)(x+15) = 0$$

$$x_1 = 16 \quad x_2 = -15 \rightarrow \text{nevyhovuje}$$

$$K = \{16\}$$

Potrebujeme 16 prvkov.

- **Koľkorakým spôsobom môžeme rozdať 32 hracích kariet 4 hráčom ?**

Riešenie :
$$C'(k, n) = \binom{n+k-1}{k}$$

$$C'(32, 4) = \binom{4+32-1}{32} = \binom{35}{32} = \frac{35!}{3!32!} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33}{3 \cdot 2} = 6\,545$$

Karty môžeme rozdať 6 545 spôsobmi.

- **V rovine je 6 rôznych bodov (žiadne 3 neležia na jednej priamke). Koľko rôznych úsečiek dostaneme pospájaním všetkých týchto bodov navzájom ?**

Riešenie :
$$C(2, 6) = \binom{6}{2}$$

$$C(2, 6) = \frac{6!}{4!2!}$$

$$C(2, 6) = \frac{6 \cdot 5}{2}$$

$$C(2, 6) = 15$$

Dostaneme 15 rôznych úsečiek.